Imlementación de un algoritmo de punto interior para problemas de programación lineal: aplicación a la determinación del precio de la reserva de electricidad

Jorge Hans Alayo Gamarra

15 de abril de 2012

1. Definición del problema: Determinación de precio de la reserva en un mercado eléctrico centralizado

En un sistema eléctrico es necesario tener cierto nivel de reserva en el sistema para cuando se produzca la salida intempestiva de unidades de generación. La asignación del precio de la reserva no es una tarea fácil; se ha llegado a un concenso de que tanto la energía y la reserva deben ser ofertados en un mismo mercado y estos mercados deben equilibrarse simultáneamente para minimizar el costo total de proveer la energía.

Se asume un mercado que opera de manera centralizada; es decir, el operador del mercado recibe las ofertas de las empresas de generacion y la cantidad de reserva maxima que ofrecen ya sea por restricciones tecnicas de la unidad o tambien como una estrategia comeercial. Entonces el operador del mercado debe resolver el siguiente problema:

$$
\begin{aligned}
\text{Minimizar} \quad & \sum_{\Omega} \pi_i \cdot p_i \\
\text{Sujeto a:} \quad & \sum_{\Omega} p_i = d \\
& \sum_{\Omega} R_i \geq R_{min} \\
& R_i \leq R_{max,i} \\
& p_i + R_i \leq P_{max,i} \\
& p_i \geq 0, R_i \geq 0
\end{aligned}
$$

Donde:

- π_i: precio de la energia de la unidad i
- p_i: potencia generada por la unidad i

- d: demanda total
- R_i: potencia de reserva de la unidad i
- R_{min}: reserva minima requerida por el sistema
- $R_{max,i}$: reserva maxima de la unidad i
- $P_{max,i}$: potencia maxima de unidad i
- Ω: conjunto de unidades de generación

La función objetivo consiste en minimizar el costo total de operación. La primera restricción es la condición de equilibrio entre la oferta y la demanda. La segunda restricción indica que la reserva total debe ser por lo menos el mínimo requerido en el sistema, dicho nivel mínimo de reserva es hallado utilizando la teoría de confiabilidad y depende del sistema eléctrico en particular que se este analizando. Finalmente las últimas restricciones indican los límites de potencia y reserva que pueden ser entregados por cada unidad, asi como la no negatividad de dichas variables.

Los multiplicadores de Lagrange asociados a las restricciones de demanda y reserva son los costos marginales asociados a la energía y a la reserva. Es demostrado por la teoría económica que los precios óptimos que equilibran el mercado de energía y reserva son iguales a dichos costos marginales respectivamente.

2. Formulación del problema en la forma estándar de programación lineal

El problema anterior es un problema de programación lineal, no obstante es necesario llevarlo a la forma estandar para que sea resuelto por un metodo de punto interior (Metodo Primal Dual Barrera Logaritmica, Predictor - Corrector). El sistema en la forma estandar es el siguiente:

$$\begin{array}{ll} \text{Minimizar} & c^t \cdot x \\ \text{Sujeto a:} & A \cdot x = b \\ & x \geq 0 \end{array}$$

Expresando matricialmente el problema original se tiene:

$$\begin{array}{ll} \text{Minimizar} & [\ \pi \quad 0\ ] \cdot x \\ \text{Sujeto a:} & [\ e \quad 0\ ] \cdot x = d \\ & [\ 0 \quad e\ ] \cdot x \geq R_{min} \\ & [\ 0 \quad I\ ] \cdot x \leq R_{max} \\ & [\ I \quad I\ ] \cdot x \leq P_{max} \\ & x \geq 0 \end{array}$$

Donde:

- $x = \begin{bmatrix} p_i \\ R_i \end{bmatrix}$

- e: vector de 1
- I: matriz identidad

Finalmente, añadiendo variables de holgura al sistema, se tiene el problema expresando en la forma estándar de programación lineal:

$$\text{Minimizar} \quad \begin{bmatrix} \pi & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} p_i \\ R_{it} \\ \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix}$$

Sujeto a:

$$\begin{bmatrix} e & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e & -I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & I & 0 \\ I & I & 0 & 0 & I \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} p_{it} \\ R_{it} \\ \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d \\ R_{min} \\ R_{max} \\ P_{max} \end{bmatrix} \qquad x \geq 0$$

Con la solución del modelo se deben obtener las potencias p_i que debe generar cada unidad, asi como la reserva R_i de cada unidad. Por último, de la solución de modelo tambein se obtiene los multiplicadores asociados a la restricción de demanda λ_d y la la restricción de reserva total λ_R; estos son los precios de equilibrio en el mercado de energía y reserva respectivamente.

3. Implementación del modelo en Matlab

El modelo matricial debe ser generado a partir de los datos de la siguiente tabla:

Unidad	Precio ($\$/MW$)	P_{max}	R_{max}
1	π_1	$P_{max,1}$	$R_{max,1}$
2	π_2	$P_{max,2}$	$R_{max,2}$
...	...	...	...

Además se debe ingresar la demanda total d del sistema y la cantidad de reserva minima R_{min} requerida. Con los datos, se den formar las matrices A, b y c, despues se utilizó el algoritmo Predictor - Corrector de Merhotra, siguiendo las notas de clase. Los datos se ingresan de la siguiente manera:

```
clc
clear

%Datos del problema
        %Unidad Precio Pot. max   Reserva max.
Units=[ 1          2       250            0;
        2         17       230          160;
        3         20       240          190;
        4         28       250            0];
d= 500;

R_min=250;

```

Con los datos se implementó las matrices A, b, y c, se hallo la solución del problema y se obtuvo las variables deseadas.

```
%Implementación del modelo a partir de los datos

ng=size(Units,1);

c=[Units(:,2); zeros(ng,1); 0; zeros(ng,1);zeros(ng,1)];

A=[ ones(1,ng) zeros(1,ng) 0 zeros(1,ng) zeros(1,ng);
    zeros(1,ng) ones(1,ng) -1 zeros(1,ng) zeros(1,ng);
    zeros(ng,ng) eye(ng) zeros(ng,1) eye(ng) zeros(ng,ng);
    eye(ng) eye(ng) zeros(ng,1)  zeros(ng,ng) eye(ng)];

b=[d; R_min; Units(:,4);Units(:,3)];

%Solución del modelo por Metodo de punto interior
[x,y]=MPDBLPC(A,b,c);

%Varibles de la solución del modelo
p_i=x(1:ng);         %potencia de cada unidad
r_i=x(ng+1:ng+ng);   %reserva de cada unidad
precio_p=y(1);       %precio de la energia
precio_r=y(2);       %precio de la reserva
```

Para el algoritmo de solucion se creó la función *MPDBLPC* la cual se detalla a continuación:

```
function [x,y]=MPDBLPC(A,b,c)
%passo 1 vectores iniciales

[nr,nx]=size(A);

for i=1:nx
    xaux(i,1)=1/(norm(A(:,i))+1);
    if (c(i)<1)
        z(i,1)=1;
    else
        z(i,1)=c(i);
    end
end

n=(norm(b)+1)/(norm(A*xaux)+1);

x=n*xaux;
y=zeros(nr,1);
z;
%criterios de convergencia

fp=norm(A*x-b)/(1+norm(x));                 %factibilidad primal
fd=norm(A'*y+z-c)/(1+norm(y)+norm(z));      %factibilidad dual
co=norm(c'*x-b'*y)/(1+norm(b'*y));          %condicion de optimalidad

e=ones(nx,1);
gamma=0.99995;
```

```
%passo 3: verificacion de condiciones iniciales
while (fp>1e-5 || fd>1e-5|| co>1e-5)
    %paso preditor
    An=[        A   zeros(nr,nr)  zeros(nr,nx);
        zeros(nx,nx)          A'        eye(nx);
        diag(z)          zeros(nx,nr)        diag(x)];
    rp=b-A*x;
    rd=c-A'*y-z;
    rc=-diag(x)*diag(z)*e;
    bn=[rp;rd;rc];
    Temp=inv(An);
    dxn=Temp*bn;
    dx=dxn(1:nx);
    dy=dxn(nx+1:nx+nr);
    dz=dxn(nx+nr+1:nx+nr+nx);
    alphap=1;
    alphad=1;
    for i=1:nx
        if (dx(i)<0)
            alphap=min(-x(i)/dx(i),alphap);
        end
        if (dz(i)<0)
            alphad=min(-z(i)/dz(i),alphad);
        end
    end
    gap=x'*z;
    %actualizar variables
    xh=x+gamma*alphap*dx;
    zh=z+gamma*alphad*dz;
    gap_af=(xh'*zh);
    mu=min(0.2,(gap_af/gap)^2)*gap_af/nx;

```

```
%passo corretor
rc=-diag(x)*diag(z)*e+mu*e-diag(dx)*diag(dz)*e;
bn=[rp;rd;rc];
dxn=Temp*bn;
dx=dxn(1:nx);
dy=dxn(nx+1:nx+nr);
dz=dxn(nx+nr+1:nx+nr+nx);
alphap=1;
alphad=1;
for i=1:nx
    if (dx(i)<0)
        alphap=min(-x(i)/dx(i),alphap);
    end
    if (dz(i)<0)
        alphad=min(-z(i)/dz(i),alphad);
    end
end
%actualizar variables
x=x+gamma*alphap*dx;
y=y+gamma*alphad*dy;
z=z+gamma*alphad*dz;
fp=norm(A*x-b)/(1+norm(x));                  %factibilidad primal
fd=norm(A'*y+z-c)/(1+norm(y)+norm(z)); %factibilidad dual
co=norm(c'*x-b'*y)/(1+norm(b'*y));      %condicion de optimalidad
end
```

4. Aplicación del modelo

El modelo se aplicó con los siguientes datos tomados de la referencia [1]:

Unidad	Precio ($\$/MW$)	P_{max}	R_{max}
1	2	250	0
2	17	230	160
3	20	240	190
4	28	250	0

Se consideró un $R_{min} = 250$ MW y $d = 500$ MW. La solución arrojada por el modelo se resume en la siguiente tabla:

Unidad	Potencia (MW)	Reserva (MW)
1	250	0
2	170	60
3	50	190
4	30	0

El precio de la energía es de 28 \$/MWh y el de la reserva es de 11 \$/MWh. El precio de la energía si no hubiese necesidad de reserva sería el costo de la ultima unidad en generar los 500 MW si se ordenan los costos de menor a mayor: la unidad 3 con 20 $/MWh. Se observa que la necesidad de la reserva incrementa los costos operativos del mercado.

Referencias

[1] Daniel Kirchen, Goran Strbac. *Fundamental of Power System Economics* 2004 John Wyley & Sons.

[2] Andreu Mas-Collel, Michael Winston, Jerry Green. *Microeconomic Theory* Oxford University Press, USA (June 15, 1995).