Introducción a la coordinación hidrotérmica en sistemas eléctricos con OPL CPLEX

Hans Alayo

29 de abril de 2015

1. Introducción

Frecuentemente en sistemas eléctricos de potencia, además de las unidades de generación térmica, existen unidades de generación hidráulica que cuentan con embalses que permiten almacenar agua para ser turbinada en un momento *adecuado*. Al problema del manejo de los embalses de forma *adecuada* se le conoce como coordinación hidrotérmica. El principal objetivo es encontrar la política de almacenamiento de los embalses (energía) de forma de minimizar el costo de operación total a lo largo de un periodo de tiempo.

Para el caso peruano, el sistema eléctrico cuenta con un porcentaje significativo de generación hidráulica por lo que es importante conocer de forma básica el problema de coordinación hidrotérmica. En el presente tutorial se muestra a través de un pequeño ejemplo el modelamiento matemático y las principales características de las soluciones del problema de coordinación hidrotérmica.

2. El modelamiento matemático

Las unidades hidráulicas se caracterizan por acoplar intertemporalmente las decisiones de producción. En general el modelamiento del problema involucra plantear las restricciones para cada periodo y plantear la ecuación que representa la dinámica de los embalses, la cual es la ecuación que introduce el acoplamiento intertemporal de las decisiones:

$$v_{t+1} = v_t - q_t\,\tau_t + a_t\,\tau_t \tag{1}$$

En donde v_t representa el volumen almacenado en el periodo t, q_t representa el caudal turbinado de agua en el periodo t, τ_t representa el número de horas que dura el periodo y a_t representa el afluente en el periodo t.

En vez de plantear un modelo complicado, se ilustra la formulación básica a partir de un ejemplo sencillo basado en (Wood & Wollenberg 1996). El ejemplo cuenta inicialmente con tres unidades térmicas con las siguientes características:

Unidad 1 :
Max output = 600 MW
Min output = 150 MW
Input- output curve: $F_1 = 561 + 7{,}92\, P_1 + 0{,}001562\, P_1^2$

Unidad 2 :
Max output = 400 MW
Min output = 100 MW
Input- output curve: $F_2 = 310 + 7{,}85\, P_2 + 0{,}00194\, P_2^2$

Unidad 3 :
Max output = 200 MW
Min output = 50 MW
Input- output curve: $F_3 = 78 + 7{,}97\, P_3 + 0{,}00482\, P_3^2$

Si se debe suministrar una demanda de $D = 850MW$, el problema a resolver es el siguiente:

$$\text{Min} \sum_{i \in G} F_i \tag{2}$$

s.t:

$$\sum_{i \in G} P_i = D \tag{3}$$

$$P_i \leq P_i^{max} \;\; \forall i \in G \tag{4}$$

$$P_i \geq P_i^{min} \;\; \forall i \in G \tag{5}$$

El modelo puede implementarse en OPL CPLEX de forma similar a la que se muestra en el apéndice A. Los resultados con los datos del problema son los siguientes

$$P_1 = 393{,}2MW$$
$$P_2 = 334{,}6MW$$
$$P_2 = 122{,}2MW$$

Si se cambia la demanda por $D = 1000MW$ la solución es la siguiente:

$$P_1 = 463{,}62MW$$
$$P_2 = 391{,}33MW$$
$$P_2 = 145{,}06MW$$

Ahora imagínese que se desea atender la demanda por un horizonte de tiempo de un día el cual se divide en dos periodos de 12 horas con la demanda mostrada en la siguiente tabla:

Periodo	MW	horas
t=1	850	12
t=2	1000	12

Luego el problema consta en minimizar el costo de operación total para todo el periodo:

$$\text{Min} \sum_{t \in T} \sum_{i \in G} \tau_t \cdot F_{i,t} \tag{6}$$

s.t:

$$\sum_{i \in G} P_i = D_t \forall t \in T \tag{7}$$

$$P_i \leq P_i^{max} \ \forall i \in G, \forall t \in T \tag{8}$$

$$P_i \geq P_i^{min} \ \forall i \in G, \forall t \in T \tag{9}$$

$$\tag{10}$$

El resultado del problema se obtuvo con un modelo similar al que se muestra en el apéndice B. Los resultados son los siguientes:

$$P_{1,t=1} = 393{,}2 \ \ P_{1,t=2} = 463{,}62$$
$$P_{2,t=1} = 334{,}6 \ \ P_{2,t=2} = 391{,}33$$
$$P_{3,t=1} = 122{,}2 \ \ P_{3,t=2} = 145{,}06$$

Nótese que el resultado es exactamente igual al que se obtuvo minimizando el costo periodo por periodo independientemente. Este es un resultado general de los sistemas con generación térmica; dichos sistemas no presentan acoplamiento en el tiempo, es decir no existen restricciones que involucren en una misma ecuación variables de dos periodos distintos, tal y como es el caso del problema de despacho económico.

Finalmente, considérese que se cuenta una unidad hidráulica con una energía almacenada en su embalse de $2000MWh$ y con las siguientes características:

Unidad 3 :
Max output = 100 MW

Min output = 0 MW
Input- output curve: $F_H = 0$

El costo de producción de una central hidráulica en general no depende de la cantidad de agua por lo que el costo variable es cero! En cuanto entra una central hidráulica en el sistema se introduce el acoplamiento intertemporal de las decisiones. pues dependiendo lo que se genera en la segunda etapa depende de lo que se generó en la primera etapa; las potencias en cada periodo se encuentran relacionadas por la siguiente ecuación:

$$P_{H,t=1} \cdot \tau_1 + P_{H,t=2} \cdot \tau_2 \leq 2000 \tag{11}$$

La ecuación anterior es una versión mucho más simplificada de la ecuación de la dinámica de un embalse mostrada anteriormente pero en general representa lo mismo. Luego el problema consta en minimizar el costo de operación total para todo el periodo incluyendo la restricción de energía disponible en el embalse:

$$\text{Min} \sum_{t \in T} \sum_{i \in G} \tau_t \cdot F_{i,t} \tag{12}$$

s.t:

$$\sum_{i \in G} P_i = D_t \forall t \in T \tag{13}$$

$$P_i \leq P_i^{max} \;\; \forall i \in G, \forall t \in T \tag{14}$$

$$P_i \geq P_i^{min} \;\; \forall i \in G, \forall t \in T \tag{15}$$

$$P_{H,t=1} \cdot \tau_1 + P_{H,t=2} \cdot \tau_2 \leq 2000 \tag{16}$$

El resultado del problema se obtuvo con un modelo similar al que se muestra en el apéndice C. Los resultados son los siguientes:

$$\begin{array}{ll} P_{1,t=1} = 361{,}85 & P_{1,t=2} = 416{,}65 \\ P_{2,t=1} = 309{,}39 & P_{2,t=2} = 353{,}51 \\ P_{3,t=1} = 112{,}07 & P_{3,t=2} = 129{,}83 \\ P_{H,t=1} = 66{,}66 & P_{H,t=2} = 99{,}99 \end{array}$$

Se puede observar que la solución es muy diferente al resultado que se hubiese obtenido al optimizar independientemente cada periodo (en cada periodo se despacharía al máximo la unidad hidráulica al tener costo cero!). En este caso se ha despachado menos potencia en el periodo de menor demanda (y con ello menor costo marginal) para utilizar la energía almacenada en el periodo de mayor demanda (mayor costo marginal) y así disminuir el costo de operación total, en general el resultado se mantiene para cualquier sistema.

Finalmente es importante definir el concepto del valor del agua. En el ejemplo mostrado se ha dejado de despachar agua en el primer periodo para ser utilizada en el segundo periodo, dicha potencia que no fue abastecida por la unidad hidráulica fue despachada por unidades térmicas, luego se define el valor del agua por el costo de oportunidad de utilizar el agua y que representa la variación en el costo del primer periodo al relajar la restricción de energía (E). Para los dos periodos se tiene que el costo total (CT) en cada periodo es una función de la energía disponible en el embalse:

$$\text{Min } CT_1(E) + CT_2(E) \tag{17}$$

$$\frac{\partial CT_1(E)}{\partial E} = -\frac{\partial CT_2(E)}{\partial E} \tag{18}$$

$$\text{Valor del agua} = |\frac{\partial CT_1(E)}{\partial E}| = |-\frac{\partial CT_2(E)}{\partial E}| \tag{19}$$

Lo óptimo es cuando el valor del agua es el mismo en ambos periodos. En el problema planteado:

$$\text{Min} \sum_{t \in T} \sum_{i \in G} \tau_t \cdot F_{i,t} \tag{20}$$

$$\text{s.t:}$$

$$\sum_{i \in G} P_i = D_t \forall t \in T \tag{21}$$

$$P_i \leq P_i^{max} \;\; \forall i \in G, \forall t \in T \tag{22}$$

$$P_i \geq P_i^{min} \;\; \forall i \in G, \forall t \in T \tag{23}$$

$$P_{H,t=1} \cdot \tau_1 + P_{H,t=2} \cdot \tau_2 \leq E \tag{24}$$

El multiplicador de Lagrange asociado a la última restricción representa la variación del costo total respecto a incrementar el valor de la energía disponible E. A partir de ese multiplicador se puede también encontrar el valor del agua, como tarea puedes encontrar como se relaciona el valor del agua con ese multiplicador.

A. Modelo de despacho económico en OPL CPLEX

El archivo del modelo (.mod) es el siguiente:

```
//Conjuntos
{string} G=...;

//Parametros
float D=...;
float a[G]=...;
float b[G]=...;
float c[G]=...;
float Pmin[G]=...;
float Pmax[G]=...;

//Variables
dvar float P[G];

//Modelo
minimize sum(i in G)(a[i]+b[i]*P[i]+c[i]*(P[i])^2);

subject to{
forall(i in G)
P[i]<=Pmax[i];
forall(i in G)
P[i,t]>=Pmin[i];
sum(i in G)P[i]==D;
}
```

El archivo de datos (.dat) es el siguiente:

```
D= 850;
G={"G1""G2""G3"};
a=[581 310 78 ];
b=[7.92 7.85 7.97 ];
c=[0.001562 0.00194 0.00482 ];
Pmax=[600 400 200 ];
Pmin=[150 100 50 ];
```

B. Modelo de despacho económico multietapa en OPL CPLEX

El archivo del modelo (.mod) es el siguiente:

```
//Conjuntos
{string} G=...;
range T=1..2;

//Parametros
float D[T]=...;
float tau[T]=...;
float a[G]=...;
float b[G]=...;
float c[G]=...;
float Pmin[G]=...;
float Pmax[G]=...;

//Variables
dvar float P[G,T];

//Modelo
minimize sum(t in T,i in G)(a[i]+b[i]*P[i,t]+c[i]*(P[i,t])^2)*tau[t];

subject to{
forall(i in G, t in T)
P[i,t]<=Pmax[i];
forall(i in G, t in T)
P[i,t]>=Pmin[i];
forall(t in T)
sum(i in G)P[i,t]==D[t];
}
```

El archivo de datos (.dat) es el siguiente:

```
D= [850 1000];
tau=[12 12];
G={"G1""G2""G3" };
a=[581 310 78 ];
b=[7.92 7.85 7.97 ];
c=[0.001562 0.00194 0.00482 ];
Pmax=[600 400 200 ];
Pmin=[150 100 50 ];
```

C. Modelo de despacho hidrotérmico multietapa en OPL CPLEX

El archivo del modelo (.mod) es el siguiente:

```
//Conjuntos
{string} G=...;
range T=1..2;

//Parametros
float D[T]=...;
float tau[T]=...;
float a[G]=...;
float b[G]=...;
float c[G]=...;
float Pmin[G]=...;
float Pmax[G]=...;

//Variables
dvar float P[G,T];

//Modelo
minimize sum(t in T,i in G)(a[i]+b[i]*P[i,t]+c[i]*(P[i,t])^2)*tau[t];

subject to{
forall(i in G, t in T)
P[i,t]<=Pmax[i];
forall(i in G, t in T)
P[i,t]>=Pmin[i];
forall(t in T)
sum(i in G)P[i,t]==D[t];
P["H1",1]*tau[1]+P["H1",2]*tau[2]==2000;
}
```

El archivo de datos (.dat) es el siguiente:

```
D= [850 1000];
tau=[12 12];
G={"G1""G2""G3" "H1"};
a=[581 310 78 0];
b=[7.92 7.85 7.97 0];
c=[0.001562 0.00194 0.00482 0];
Pmax=[600 400 200 100];
Pmin=[150 100 50 0];
```